

Exercices – Séquence n° 9 – ESPACE (II) :

orthogonalité, distance

Contenus	• Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace. Bilinearité, symétrie. • Orthogonalité de deux vecteurs de l'espace. Caractérisation par le produit scalaire. • Base orthonormée, repère orthonormé. • Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme. • Expression de la distance entre deux points. • Développement de $\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2$, formules de polarisation. • Orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite. • Vecteur normal à un plan. • Projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan.
Capacités	• Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace. • Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan. • Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures : longueur, angle, aire, volume. • Étudier des problèmes de configuration dans l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; lieux géométriques simples, par exemple plan médiateur de deux points.

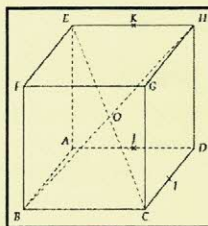
COMPÉTENCES :**Ch :** CHERCHER**Mo :** MODÉLISER**Re :** REPRÉSENTER**Ra :** RAISONNER**Ca :** CALCULER**Co :** COMMUNIQUER**Exercice 1** [Ra-Ca-Co]

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 2 ci-contre :

On note O le centre de ce cube et I, J et K les milieux respectifs des arêtes [CD], [AD] et [EH].

Calculer les produits scalaires suivants :

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ | 2) $\overline{OB} \cdot \overline{OH}$ | 3) $\overline{OE} \cdot \overline{OH}$ |
| 4) $\overline{BD} \cdot \overline{BH}$ | 5) $\overline{EF} \cdot \overline{AG}$ | 6) $\overline{IJ} \cdot \overline{FH}$ |
| 7) $\overline{AB} \cdot \overline{AG}$ | 8) $\overline{FB} \cdot \overline{AK}$ | 9) $\overline{AD} \cdot \overline{BK}$ |

**Exercice 2** [Ra-Ca-Co]

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient M(7 ; -5 ; 6), D(1 ; 3 ; -3) et R(0 ; -4 ; -3) trois points de l'espace et I le milieu du segment [MD].

- 1) Montrer que le triangle MDR est rectangle en R.
- 2) En calculant $\overline{RI} \cdot \overline{RD}$ de deux manières différentes, déterminer la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{DRI}$.

Exercice 3 [Ra-Ca-Co]

Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) Calculer $\vec{r} \cdot \vec{s}$ lorsque $\vec{r} \begin{pmatrix} -3,5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{s} \begin{pmatrix} -4 \\ 5,5 \\ -3 \end{pmatrix}$.
- 2) Calculer $\|\vec{AB}\|$ lorsque $A(-4; 3; -2)$ et $B(3; -1; 7)$.
- 3) La droite d passant par le point $C(13; -6; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{t} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale à la droite d' passant par le point $D(3; 4; -7)$ et de vecteur directeur $\vec{w} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$?
- 4) Pour quelle(s) valeur(s) du réel α , les vecteurs $\vec{p} \begin{pmatrix} -1 \\ 3\alpha \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{q} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 4 [Ra-Ca-Co]

Les questions 1 et 2 suivantes sont indépendantes.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que : $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 4$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- 2) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.
 - a. Montrer que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux.
 - b. Quelle propriété géométrique vient-on de démontrer ?

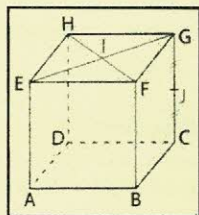
Exercice 5 [Ra-Ca-Co]

Soient a un réel strictement positif et ABCDEFGH est un cube d'arête a .

I est le centre de la face EFGH et J le milieu de l'arête [CG].

Exprimer, en fonction de a , les produits scalaires suivants :

- 1) $\vec{AI} \cdot \vec{FB}$
- 2) $\vec{IJ} \cdot \vec{DB}$

**Exercice 6** [Ra-Ca-Co]

Les questions 1 et 2 suivantes sont indépendantes.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que : $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 7$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 3$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- 2) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.
 - a. Montrer que : $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
 - b. Quelle propriété géométrique vient-on de démontrer ?

Exercice 7 [Ra-Ca-Co]

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2; -3; 4)$, $B(1; 2; -11)$, $C(-4; 5; -9)$, $D(-8; 3; 4)$ et $E(-3; 10; 6)$.

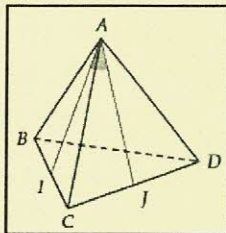
- 1) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
- 2) Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont orthogonales.
- 3) Démontrer que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 8 [Ra-Ca-Co]

On considère un tétraèdre régulier ABCD d'arête 2.

Soit I le milieu du segment [BC] et J celui du segment [CD].

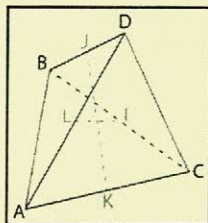
- 1) Calculer les longueurs AI, AJ et IJ.
- 2) En déduire la valeur de $\widehat{AI \cdot AJ}$ puis la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{IAJ}$.

**Exercice 9** [Ra-Ca-Co]

ABCD est un tétraèdre tel que : $AB = CD$.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes [BC], [BD], [CA] et [DA].

- 1) Démontrer que : $\vec{LI} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{DC}$
- 2) Exprimer de même $\vec{KJ}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$.
- 3) En déduire que les droites (LI) et (KJ) sont orthogonales.

**Exercice 10** [Ra-Ca-Co]

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

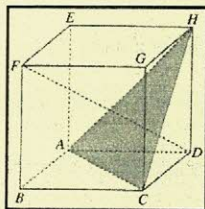
On considère un plan $\mathcal{P}$ de base $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et un plan $\mathcal{P}'$ dont $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

- 1) Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathcal{P}$.
- 2) Que peut-on en déduire quant aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?
- 3) Le point $O(0; 0; 0)$ appartient aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
 - a. Montrer que le point $B(29; -22; 118)$ appartient aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
 - b. Que peut-on en déduire ?

Exercice 11 [Ch-Ra-Ca-Co]

ABCDEFGH est un cube d'arête 5.

En choisissant un repère adapté, démontrer que la droite (DF) est orthogonale au plan (ACH).

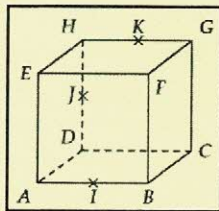
**Exercice 12** [Ch-Ra-Ca-Co]

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1. On note I le milieu de l'arête [AB], J celui de [DH] et K celui de [HG].

On se place dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

- 1) Démontrer que le vecteur $\vec{CE}$ est un vecteur normal du plan (IJK).
- 2) Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).
- 3) Soit M un point de la droite (CE).

Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?

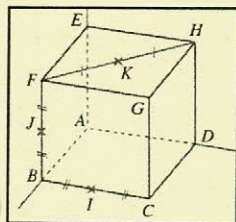
**Exercice 13** [Ch-Ra-Ca-Co]

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-contre.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

- 1) Déterminer les coordonnées des points I, J, G et K.
- 2) Démontrer que le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (IJK).



- 3) On considère le point $L\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$.
- Montrer que $\overrightarrow{LG}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.
 - Démontrer que $\overrightarrow{IL} = -\frac{1}{2}\vec{IJ} + \vec{IK}$
 - Déduire des questions précédentes la distance du point G au plan (IJK).
 - En déduire le volume du tétraèdre GIJK.

Exercice 14 [Ra-Ca-Co]

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2; 3; 3)$, $B(-1; 17; -17)$ et le vecteur $\vec{n}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dont $\vec{n}$ est un vecteur normal.

- Démontrer que le point $H(-9; 5; -1)$ appartient au plan $\mathcal{P}$.
- Démontrer que H est le projeté orthogonal de B sur le plan $\mathcal{P}$.
- En déduire la distance du point B au plan $\mathcal{P}$.
- Soit $C(5; 11; -5)$.
 - Justifier que C est le projeté orthogonal de H sur la droite (BC).
 - Calculer la distance du point H à la droite (BC).

Exercice 15 [Ch-Ra-Ca-Co]

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit d la droite passant par le point $A(1; -2; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point $B(-15; -10; 4)$ sur la droite d .

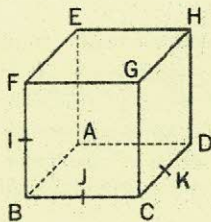
Exercice 16 [Ch-Ra-Ca-Co]

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 ci-contre.

Le point I est le milieu du segment [BF], J est le milieu de [BC] et K est le milieu de [CD].

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

- Déterminer les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.
- Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).
- On considère le point $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
 - Montrer que les points N, I, J et K sont coplanaires.
 - Montrer que les points A, G et N sont alignés.
 - En déduire la distance du point G au plan (IJK).
- On désigne par M un point du segment [AG].
 - Justifier l'existence d'un réel t de $[0; 1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.
 - Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.
 - Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance MI soit minimale.
- Montrer que le point $R\left(1; \frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right)$ est le pied de la hauteur issue de K dans le triangle IJK.
 - Déterminer le volume du tétraèdre GIJK.



Pour réviser

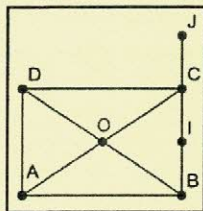
Exercice 17 [Ra-Ca-Co]

ABCD est un rectangle de centre O tel que : $AB = 6$ et $AD = 4$.

On appelle I le milieu du segment [BC] et J le point défini par : $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC}$

Calculer les produits scalaires :

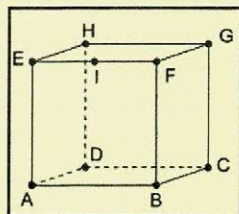
- 1) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC}$
- 2) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{AD}$
- 3) $\overrightarrow{CJ} \cdot \overrightarrow{DI}$
- 4) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$
- 5) $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BO}$
- 6) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BD}$

**Exercice 18** [Ra-Ca-Co]

Soit a un réel positif. On considère le cube ABCDEFGH d'arête a ci-contre :

Calculer les produits scalaires suivants :

- 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- 2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$
- 3) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AD}$
- 4) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HD}$
- 5) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BG}$
- 6) $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{FD}$

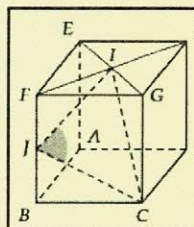
**Exercice 19** [Ra-Ca-Co]

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 ci-contre :

Soit I le centre de la face EFGH et J le milieu de l'arête [BF].

Objectif : Déterminer la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{CJl}$.

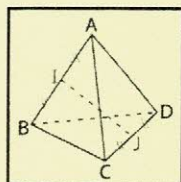
- 1) Première méthode géométrique
 - a. Calculer la longueur de chacun des trois côtés du triangle IJC.
 - b. En déduire que : $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI} = \frac{1}{4}$
 - c. En déduire la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{CJl}$.
- 2) Deuxième méthode géométrique
 - a. En décomposant astucieusement les vecteurs $\overrightarrow{JC}$ et $\overrightarrow{JI}$, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI}$
 - b. En déduire la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{CJl}$.
- 3) Méthode analytique
 - a. En se plaçant dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, déterminer les coordonnées des points C, I et J puis calculer le produit scalaire $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI}$
 - b. En déduire la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{CJl}$.

**Exercice 20** [Ra-Ca-Co]

Soient a un réel strictement positif et ABCD un tétraèdre régulier d'arête a .

I et J sont les milieux respectifs des arêtes [AB] et [DC].

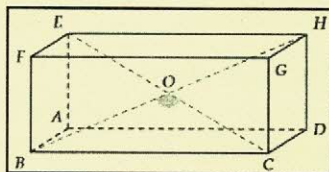
- 1) Exprimer, en fonction de a , les produits scalaires suivants :
 - a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
 - b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- 2) En déduire $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AI}$.



Exercice 21 [Ra-Ca-Co]

On considère le pavé droit ABCDEFGH tel que : $AB = 3$, $AD = 5$ et $AE = 2$.
On note O son centre.

En se plaçant dans le repère orthonormé $(A; \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$,
déterminer, la mesure, arrondie au degré, l'angle $\widehat{BOC}$.



Pour aller plus loin

Exercice 22 [Ch-Ca-Ra-Co] Sphère circonscrite à un tétraèdre

ABCD est un tétraèdre non aplati.

Savoir si les quatre sommets appartiennent à une même sphère revient à savoir s'il existe un point O situé à égale distance des points A, B, C et D.

- Le plan médiateur de l'arête [AB] est le plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à cette arête en son milieu I.
Un point M appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$.
En déduire que M appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $MA = MB$. (On pourra factoriser la différence $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2$)
- On se propose de déterminer d'abord l'ensemble Δ des points de l'espace équidistants des trois points A, B et C.
 - Il existe un point O, et un seul, du plan (ABC) qui appartient à Δ . Lequel ?
 - Montrer que Δ est une droite. Préciser sa position par rapport au plan (ABC).
- Démontrer que Δ coupe le plan médiateur de l'arête [AD]. (Pour cela, on pourra raisonner par l'absurde).

Il existe donc un unique point Ω de l'espace, équidistant des sommets du tétraèdre, et donc une sphère, et une seule, qui passe par ses quatre sommets. Cette sphère est dite **circonscrite au tétraèdre**.

